Θεωρία Συνόλων

12/10/2016

Έστω $\mathcal{C} = \{ X : X$ σύνολο και $X \notin X \}$ Παράδοξο: Russel

Τότε αν $\mathcal{C} \in \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{C} \notin \mathcal{C}$

Όμως αν $\mathcal{C} \notin \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{C} \in \mathcal{C}$

Παράδοξο Cantor: Έστω $\mathcal{C}$ σύνολο όλων των συνόλων

Τότε $(\forall c \subseteq \mathcal{C}) \Rightarrow c \in \mathcal{C} \Rightarrow P(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C} \Rightarrow P(\mathcal{C}) \lesssim \mathcal{C}$ (Άτοπο!)

Όμως γνωρίζουμε ότι πάντα $\mathcal{C} < P(\mathcal{C})$

Ορισμός: Ένα σύνολο E λέγεται καλά διατεταγμένο $\Longleftrightarrow$ κάθε μη-κενό υποσύνολό του έχει ελάχιστο

Ένα σύνολο E λέγεται γραμμικά διατεταγμένο αν-ν ισχύει $X \leq Y$ ή $Y \leq X$

Σημείωση: Κάθε καλά διατεταγμένο είναι γραμμικά διατεταγμένο ($\not\Leftarrow$) Αντιπαράδειγμα. $\mathbb{R}$

Αρχή υπερπεπερασμένης Επαγωγής: Έστω E ένα καλά διατεταγμένο σύνολο με ελάχιστο στοιχείο, έστω $\min E = a$ και $P(\cdot)$ ένας προτασιακός τύπος με σύνολο αναφοράς το E και $P(a)$ αληθής πρόταση. Ισχύει για κάθε $y \in E$ ότι: [$P(x)$ αληθής πρόταση για κάθε $x < y$] $\Rightarrow$ $P(y)$ αληθής

Τότε ισχύει ότι $P(y)$ αληθής πρόταση για όλα τα $y \in E$.

Απόδειξη: Έστω $A \subseteq E$ το σύνολο αλήθειας του $P(\cdot)$. Τότε το $a \in A$. Έστω $A \neq E$ ($A \subset E$). Τότε $A^c \neq \emptyset$

$\xrightarrow[\text{διατεταγμένο}]{E \text{ καλά}}$ έχει ελάχιστο. Έστω $\beta = \min A^c$. Τότε ισχύει ένα από τα εξής: (i) $(\forall x)\ x < \beta$ ισχύει $P(x) \Rightarrow P(\beta)$ αληθής $\Rightarrow \beta \in A$ (άτοπο)

(ii) $(\exists x)\ x < \beta$ τέτοιο ώστε $\sim P(x)$

$\Rightarrow x \notin A^c \wedge x \notin A$

$\Rightarrow x \in A \wedge x \notin A$ (άτοπο)

$\mathbb{N}$ ελάχιστο επαγωγικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$

<u>Πρόταση</u>: Έστω $m \in \mathbb{N}$ τότε δεν υπάρχει $x \in \mathbb{N}$ με $m < x < m+1$.

<u>Πρόταση</u>: Το $\mathbb{N}$ είναι καλά διατεταγμένο σύνολο

Αρχή της Επαγωγής: Έστω $P(\cdot)$ προτασιακός τύπος με σύνολο αναφοράς το $\mathbb{N}$ και $P(1)$ αληθής πρόταση
Ισχύει ακόμη ότι: $P(k)$ αληθής πρόταση $\Rightarrow P(k+1)$ αληθής πρόταση
για όλα τα $k \in \mathbb{N}$. Τότε $P(x)$ αληθής για όλα τα $x \in \mathbb{N}$

Απόδειξη 1ης πρότασης: Θεωρούμε το $A = \{n \in \mathbb{N} : \exists x \in \mathbb{N} \ n < x < n+1\}$
Έστω $A \neq \emptyset$. Το $A \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow A$ είναι κάτω φραγμένο
Άρα $\exists z \in \mathbb{R}$: $z = \inf A$. Θεωρώ $n \in A \Rightarrow \exists x \in A : n < x < n+1$
Άρα $n-1 < x-1 < n$ (*). Όμως $x \in \mathbb{N}$. Άρα $x-1=0$ ή $x-1 \in \mathbb{N}$ (Σελ. 132 Μαθ. Ανάλ)
- Αν $x-1=0$. Τότε $n-1<0$ (Άτοπο)
- Αν $x-1 \in \mathbb{N}$, τότε η (*) περιγράφει το σύνολο A
$\Rightarrow n-1 \in A \xrightarrow{z=\inf A} z \leq n-1 \Rightarrow z+1 \leq n \Rightarrow z+1$ κάτω φράγμα του $A \Rightarrow z \geq z+1$ (Άτοπο)

Άρα, τελικά $A = \emptyset$

Απόδειξη της πρότασης: Έστω υπάρχει $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$ και το A δεν έχει ελάχιστο στοιχείο.

Θεωρώ το $D = \{x \in \mathbb{N} : x < y$ για όλα τα $y \in A\}$

Θα δείξουμε ότι D επαγωγικό. Τότε $D = \mathbb{N}$ γιατί θα έχουμε ότι $\emptyset = A \cap D = A \cap \mathbb{N} = A$ άτοπο.

Ισχύει ότι $1 \leq y$ για όλα τα $y \in A$, αφού $A \subseteq \mathbb{N}$. Όμως $1 \notin A$, γιατί τότε το A θα είχε ελάχιστο. Άρα $1 < y$ $\forall y \in A$ δηλαδή $1 \in D$. Ισχύει ότι $1 \in D$. Δεχόμαστε ότι δεν ισχύει ότι $\forall x \in D$ το $x+1 \in D$. Άρα υπάρχει $m \in D$ τέτοιο ώστε $m+1 \notin D$. $m+1 \notin \Rightarrow \exists s_1 \in A: m+1 \geq s_1$ επειδή το A δεν έχει ελάχιστο θα υπάρχει $s_2 \in A$: $s_2 < s_1 \leq m+1$. Άρα $s_2 \leq m$ (προηγούμενη απόδειξη) (Άτοπο αφού $m \in D$ και $s_2 \in A$). Άρα D επαγωγικό.

Άρα το $\mathbb{N}$ είναι καλά διατεταγμένο